

Cvičení 7

KIV/PRO

Matematické hry

Odebírání sirek

Na stole je hromádka n sirek a dva hráči z ní postupně odebírají. Hráč na tahu musí odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout, prohrál. Určete, který z hráčů má vyhrávající strategii (tj. umí si zajistit výhru bez ohledu na tahy soupeře).

Řešte pro:

- $n = 6$
- $n = 8$
- $n = 10$
- $n = 2014$

Nim

Jedna z nejznámějších matematických her s dokonalou informací
(hráči znají celý stav hry, nic se neskrývá)

Několik hromádek předmětů, dva hráči

Hráč na tahu vybere jednu hromádku a z ní odebere nenulový počet předmětů

Prohrává ten, kdo nemůže táhnout (alternativně ten, kdo vzal poslední objekt)

“The subtraction game”

- Existuje horní hranice na počet odebraných objektů hráčem (může odebrat až k předmětů)
- Většinou hrána s jednou hromádkou
- Při optimální hře druhý hráč vyhraje jen pokud $0 = n \pmod{k + 1}$
- Vítězná strategie je odebrat k objektů

[Zahrajte si Nim](#)

Tripod

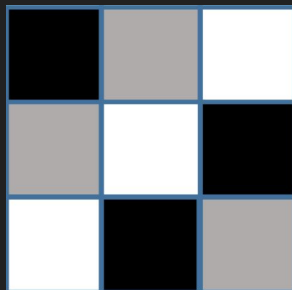
Hra pro 2 osoby, každý má 4 kameny, jeden bílý, jeden černé

Střídavě pokládají kameny na prázdná pole

Cíl: umístit 3 kameny v řádku, sloupci nebo na polích stejné barvy

První hráč neuspěje ve 4 tazích => vítězí druhý

Který z hráčů má vítěznou strategii?



Vybarvování kružnic

Dva hráči hrají hru na plánu s n soustřednými kružnicemi a střídavě vybarvují po jednom políčku. V prvním tahu se vybarví jedno z vnějších políček. V každém dalším tahu se musí vybarvit políčko, které sousedí s posledně vybarveným ve směru jedné z šipek. Každé políčko lze vybarvit pouze jednou. Kdo nemůže táhnout, prohrál.

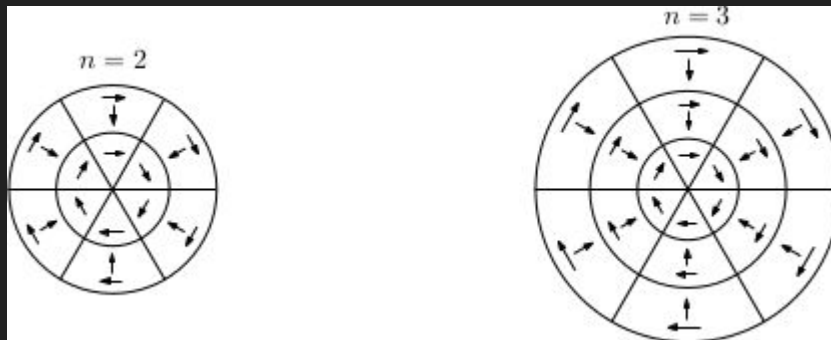
Pro hodnoty

- $n=2$
- $n=3$
- $n=5$
- $n=2014$

Který z hráčů vyhraje, hrají-li oba optimálně?

Kolik má hra tahů v případě, že oba hráči hrají bez chyb (tj. tak, aby co nejrychleji vyhráli či alespoň co nejvíce oddálili prohru)?

Kolik je možných průběhů celé hry? Dva průběhy jsou různé, pokud se liší v alespoň jednom tahu.



Dobře známé matematické hry

Wythoff's game

Subtract a square

Grundy's game

Wythoffova hra

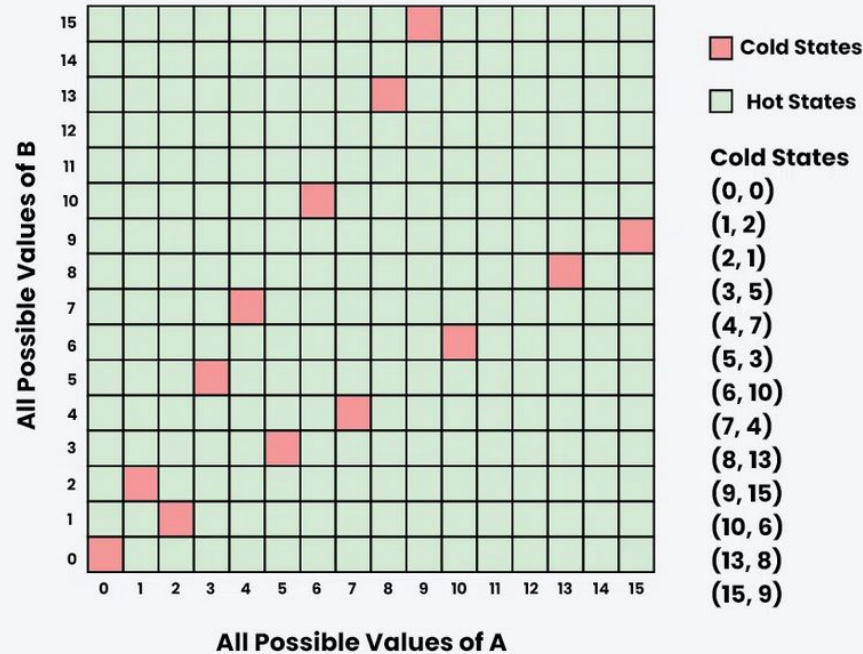
Matematická hra pro dva hráče hrána se dvěma hromádkami mincí/sirek. Hráč v každém tahu odstraní určitý počet sirek z jedné nebo z obou hromádek. Hra končí když hráč odstraní poslední sirku. Tento hráč vyhrává. Na začátku je na první hromádce m sirek a na druhé n .

Stavy hromádek můžeme zapsat pomocí souřadnic (m,n) a klasifikovat jako:

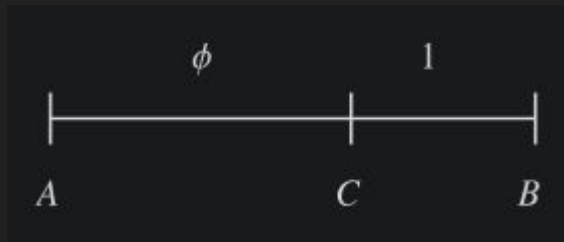
- Cold state - stav ze kterého hráč na tahu vždy prohraje (např.: $(1, 2)$, $(2, 4)$)
- Hot state - stav ze kterého hráč na tahu může vyhrát

Wythoffova hra

Different States of Wythoff's Game



Wythoffova hra



Proložíme dvě přímky skrz cold states - dělí čtverec v poměru ϕ

- ϕ = golden ratio = $(1 + \sqrt{5})/2$

Souřadnice x a y se liší o k, a lze je dopočítat jako $\text{floor}(k \cdot \phi, k \cdot \phi^2)$

Např.:

- $k = 1$, cold state = $(\text{floor}(1 \cdot \phi), \text{floor}(1 \cdot \phi^2)) = (\text{floor}(1.618), \text{floor}(2.618)) = (1, 2)$
- $k = 2$, cold state = $(\text{floor}(2 \cdot \phi), \text{floor}(2 \cdot \phi^2)) = (\text{floor}(3.236), \text{floor}(5.236)) = (3, 5)$
- $k = 3$, cold state = $(\text{floor}(3 \cdot \phi), \text{floor}(3 \cdot \phi^2)) = (\text{floor}(4.854), \text{floor}(7.854)) = (4, 7)$

(A, B) je cold state pokud:

- $k = \text{abs}(A - B)$, cold state = $\text{floor}(k \cdot \phi, k \cdot \phi^2)$
- Pokud $A == k \cdot \phi$ and $B == k \cdot \phi^2 \Rightarrow (A, B)$ je cold state

Zdroje

<https://kombinatorika.cuni.cz/app/?page=04hry1>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Nim>

https://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff%27s_game

<https://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html>

<https://contest.felk.cvut.cz/00prg/solved/problems.html>